

Algebra kompakt

Das Umformen von **Termen** und **Gleichungen** funktioniert nach bestimmten Vorgaben und läuft in einer fest vorgegebenen Reihenfolge ab. Um mit Termen (1, 2 + 3, x + 1, etc.) und Gleichungen (Term = Term) umgehen zu können, ist es daher unumgänglich, alle diese Regeln zu kennen und zu können – Theorie und Praxis!

Reihenfolge: **KLAPPS/Kla-po-pu-stri**

1. **Klammern** (bei mehreren Klammern: von innen nach außen auflösen)
2. **Potenzen**
3. **Punktrechnung**
4. **Strichrechnung**

Sobald eine Variable, also eine Unbekannte ("x, y, a"), auftaucht, kann nicht im Sinne von **KLAPPS/Kla-po-pu-stri** einfach ausgerechnet werden. Dann wird mithilfe der folgenden Regeln solange weitergerechnet, bis der Term durch Umformen vereinfacht wurde. Bei Gleichungen, die ja letztlich nur aus zwei Termen mit Gleichzeichen ("=") bestehen, werden erst beide Seiten durch **Termumformung** vereinfacht. Danach beginnt die **Äquivalenzumformung** (|+1, |-2x, |:0,5), die immer beide Termen auf einmal betrifft und ein Auflösen nach einer Variable zum Ziel hat; mehr dazu unten.

Vorzeichen vs. Rechenzeichen (Operatoren)

$$\begin{array}{llll} -(+a) = -a & +(-a) = -a & -(-a) = +a & +(a) = +a \\ (-a) \cdot (+b) = -ab & (+a) \cdot (-b) = -ab & (-a) \cdot (cb) = +ab & (+a) \cdot (+b) = +ab \end{array}$$

Rechengesetze

Binomische Formeln:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Minus vor der **Klammer** ändert alle Vorzeichen, wenn die Klammer wegfällt. Plus ändert hingegen nichts, wenn die Klammer wegfällt:

$$-(a + b) = -a - b \quad -(a - b) = -a + b \quad +(a - b) = a - b \quad +(a + b) = +a + b$$

Malpunkte können der Kürze wegen weggelassen werden! (ab bedeutet a · b, "2x")

Ausmultiplizieren (Multiplikation von Klammern) bedeutet "Jedes einmal mit Jedem" und statt "+" könnten auch "-" stehen. Dann gelten die obigen Vorzeichenregeln:

$$(a + b) \cdot c = ac + bc \quad (a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$$

Ausklammern (Division von **gleichen Faktoren** in **Gliedern**=Strichrechnungen, wie "2b + bc - b"):

$$ac + bc = (a + b) \cdot c$$

Zusammenfassen: Nur Variablen gleichen Typs (x, a, y) dürfen zusammengefasst werden! Das gilt auch für Potenzen mit verschiedenen Hochzahlen (x^2 , a^3).

$$x + 2x = 3x \quad 2y^2 - 4y^2 = -2y^2 \quad 2x + 3x - 2x^2 + 3x^2 = 5x + x^2$$

Potenzen

Allgemeines

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^2 = a \cdot a$$

Basis^{Exponent} = **Potenz**



$$5^2 = 25$$

negative Zahlen: $(-a)_{\text{gerade Zahl}} \Rightarrow$ positives Ergebnis
 $(-a)_{\text{ungerade Zahl}} \Rightarrow$ negatives Ergebnis

Multiplikation: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ Division (Bruch): $\frac{a^r}{a^s} = a^r : a^s = a^{r-s}$

Potenz der Potenz: $(a^r)^s = a^{rs}$ Potenz von Produkten: $(ab)^r = a^r b^r$

Potenz von Brüchen: $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

(Lineare) Gleichungen

Gleichungen bestehen aus zwei Termen. Jede Seite einer Gleichung ist ein Term. Pro gegebener Gleichung kann eine Unbekannte (z.B. "x") ausgerechnet werden. Zwei Unbekannte in einer Gleichung lassen sich also nicht eindeutig bestimmen, solange man nicht zwei Gleichungen mit ihnen hat. Meist geht es in Mathe darum, so viele Gleichungen oder Terme aufzustellen, wie es Unbekannte in der Aufgabe bzw. Frage gibt oder bloss eine Gleichung so zu vereinfachen, dass nur einen Unbekannte übrigbleibt. Die Kunst ist, Gegebenen und Gesuchtes zu entdecken und beide mathematisch zu verbinden, also den Weg vom Ersten zum Zweiten zu finden. Je nach Klasse und Art der Gleichung ändert sich der möglich Weg beträchtlich. Schon für eine quadratische Gleichung gelten ausgehend von den Binomischen Formeln andere Regeln (p-q-Formel) und andere Rechenarten (Wurzel, Logarithmus) kommen dazu.

Schritte zum Lösen einer (linearen="2x¹+1") Gleichung:

- Schritt: Termumformung**, um jede Seite so weit wie möglich vereinfachen
- Schritt: Äquivalenzumformung**, um alle Glieder mit Zahlen auf eine Seite, alle mit Unbekannten auf die andere Seite der Gleichung zu bekommen
- Schritt: Durch Faktor teilen**, um endgültige Lösung der Gleichung zu bestimmen ("ax = ...")
- Schritt: Wenn nötig, dann abschließend ein Probe rechnen**, d.h. Ergebnis einsetzen →

Proben

Grundsätzlich unterscheidet sich das Rechnen mit Zahlen bei der Probe vom Umformen mit Variablen! Bei der Probe werden keine Klammern aufgelöst oder binomischen Formeln angewendet – man rechnet nach der Reihenfolge schlicht aus! (**K**lammer → **P**otenz → **P**unkt → **S**trich oder kurz **KLAPPS/Kla-po-pu-stri**)

1) bei Termen: Man setzt für die Unbekannte eine angegebene Zahl ("x = 2") ein

- Schritt:** man setzt die Angabe ein und berechnet dessen Ergebnis
- Schritt:** man setzt in der letzten Zeile der Vereinfachung ein und berechnet nun
Danach sollten beide Zahlen gleich sein!

2) bei Gleichungen: Man setzt für die Unbekannte gefundene Lösung ein

- Schritt:** in der linken Seite der Gleichung einsetzen und ausrechnen
- Schritt:** in der rechten Seite der Gleichung einsetzen und ausrechnen
Danach sollten beide Seiten gleiche Ergebnisse aufweisen.